قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

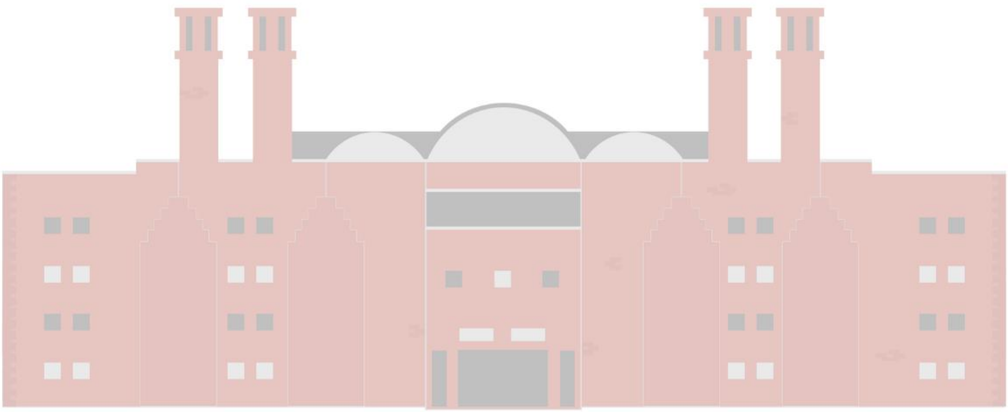
السنة الثانية / الفصل الأول

RED BUILDING TEAM

التحليل الرياضي ٣

المحاضرة الثانية والعشرون

5 صفحات



الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: 2014/11/20

السرعة، الدقّة والتميُّز

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

/RedBuildingTeam

تحويلات فورييه

1. تحويل متسلسلات فورييه (الإشارات الدورية والمستمرة)

التابع الدوري:

$f(x)$ تابع دوري دوره $T > 0$ إذا:

$$f(x+T) = f(x) \quad ; \quad \forall x, x+T \in D(f)$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$$

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$$

$\tan x, \cot x$ دورها π

- **خواص التوابع الدورية**

1) f دوره $T \Leftarrow f(x) = f(x+nT) \ ; \ n \in \mathbb{Z}$

$$f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)$$

نسمي أصغر عدد T يحقق هذه الدور الأساسي لـ f.

$\cos(x+2\pi) = \cos x : T = 2\pi$

$\tan x \ . T = \pi$

2) التابع الثابت :

$f(x) = c$ دوره أي عدد حقيقي $f(x+T) = c = f(x)$

3) $f(x)$ دوري دوره T فإن $f(\alpha x)$ دوري دوره $\frac{T}{\alpha}$

$$\cos 3x \text{ دوري و دوره } T = \frac{2\pi}{3}$$

$$f\left(\alpha x + \frac{T}{\alpha}\right) = f(\alpha x)$$

4) f دوري دوره T_1 و g دوري دوره T_2:

و $(\alpha f + \beta g)$

$f.g$ دوري دورها T المضاعف المشترك الأصغر للعددين T_1, T_2

$$f = \cos 3x . \cos 5x$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{3}, T_2 = \frac{2\pi}{5}$$

المضاعف المشترك الأصغر $T = 2\pi$

5) إذا كان f دوري دوره $T \Longleftarrow$

$$\int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f dx = \int_c^{c+T} f dx$$

تكاملات شهيرة:

- $$I = \int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$\underbrace{T_1 = \frac{2l}{m}} \quad \underbrace{T_2 = \frac{2l}{n}} \Rightarrow T = 2l$$

$$I = \begin{cases} l, m = n \\ 0; \mathrm{m} \neq \mathrm{n} \end{cases} \quad ; \quad m, n \in \mathbb{N}$$

- $$\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = \begin{cases} l, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}$$

- $\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = 0$

متسلسلة فورييه (المتسلسلة المثلثية)

هي المتسلسلة المثلثية التالية:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right] \dots \boxed{1}$$

a_0, a_n, b_n أعداد حقيقة تسمى أمثال المتسلسلة(ثوابت أولر)

التوابع المثلثية دورية دورها $T = 2l$.

إذا كانت هذه السلسلة متقاربة بانتظام في مجال ال x ومجموعها التابع $f(x)$ فإن هذا التابع دوري دوره $T = 2l$.

ونكتب:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \left[a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{\rho}\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{\rho}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{\rho}\right) + \cdots.\right]$$

تعطى ثوابت أولر بالعلاقات التالية:

- $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, cos\, \frac{n\pi x}{l} dx \quad ; \quad n = 1,2, \dots$
- $b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad ; \quad n = 1,2,3, \dots$
- $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx$

ملاحظة : عندما تكون المتسلسلة متقاربة بانتظام فإن تكامل المجموع يساوي مجموع التكاملات حيث :

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = \int_{-l}^{l} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n+1}^{\infty} \left[\int_{-l}^{l} a_n \cos\left(\frac{\pi n\, x}{l}\right) dx + \int_{-l}^{l} b_n sin \frac{\pi n\, x}{l} dx \right]$$

(تابع فردي تكامله 0 على مجال متناظر)

$$A = \int_{-l}^{l} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-l}^{l} dx = \frac{a_0}{2}\, 2l = a_0 l$$

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \int_{l}^{l} \boxed{1}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

$$A = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx\right.$$

$$\left.+\, b_n\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

أن جميع حدود هذه المتسلسلة تساوي الصفر الا عندما يكون $m = n$ عندها يكون الناتج $a_n l$

$$A = \int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = a_n l$$

ويتم استنتاج b_n بنفس الطريقة

ملاحظة : البرهان غير مطلوب

نتيجة : نسمي $\boxed{1}$ متسلسلة فورييه للتابع $f(x)$ و يسمى f مجموع متسلسلة فورييه و هو تابع دوري دوره $T =$ $2l$

f تابع مستمر على أي مجال طوله $2l$

مبرهنة الكفاية:

إذا كان f تابع دوري دوره $T = 2l$ وكان f و f' مستمرين قطعيا (لـ f و f' نقاط انقطاع من النوع الأول)

فإن متسلسلة فورييه متقاربه بانتظام على أي مجال جزئي مغلق يكون فيه f مستمر و مجموعهما يساوي التابع

$f(x)$ في هذه المجالات المغلقة أما عند نقاط الانقطاع من الأول فإن مجموع متسلسلة فورييه عندها يساوي:

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$$

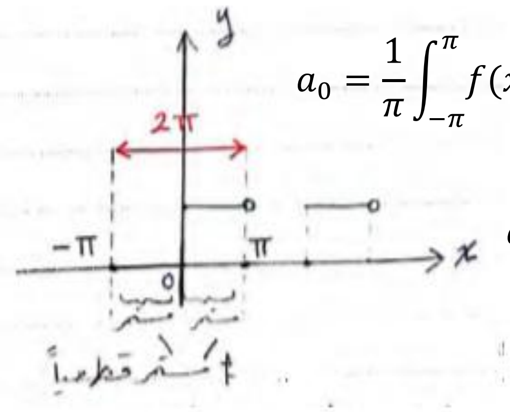
ملاحظة: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)\quad x \to x_0 + 0 \Rightarrow x > x_0$

مثال: أوجد متسلسلة فوريية لـ:

$$\boldsymbol{f} = \begin{cases} \boldsymbol{0} & ; \ -\boldsymbol{\pi} \le \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & ; \ \ \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{x} < \boldsymbol{\pi} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f(x) = f(x + 2\pi)}$$

الحل:



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{\pi} 1\ dx\right] = \frac{1}{\pi}.\pi = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\pi}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0 dx + \int_{0}^{\pi} \cos nx\ dx\right] = \left[\frac{1}{n\pi}\sin nx\ \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n}[\sin\pi - \sin 0] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}[\cos nx]_0^{\pi} = -\frac{1}{n\pi}[\cos n\pi - 1]$$

$$b_n = \begin{cases} 0\ , & n \text{ زوجي} \\ \dfrac{2}{n\pi}\ , & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x\right]$$

تنويه: تم استبدال $2k - 1$ بـ n لأن n فردي

جميل أن تعطي من يسألك ما هو في حاجة إليه ولكن أجمل من ذلك أن تعطي من لا يسألك وأنت تعرف حاجته